

Partage équitable multi-niveaux avec des utilités additives

Maxime Lucet, Nawal Benabbou, Aurélie Beynier, Nicolas Maudet

LIP6, Sorbonne Université
`{firstname.lastname}@lip6.fr`

Mots-clés : *choix social computationnel, allocation de ressources, partage équitable.*

1 Introduction

La littérature sur le partage équitable s’est principalement concentrée sur l’allocation à des individus, puis plus récemment à des groupes [1], ouvrant ainsi la voie à de nouvelles applications. Nous proposons de poursuivre cette généralisation en étudiant l’allocation de ressources au sein de structures hiérarchiques, où les groupes peuvent être imbriqués sur plusieurs niveaux. Alors que les rares travaux existants se limitent à des hiérarchies bi-niveaux — en analysant par exemple la compatibilité entre équité individuelle et de groupe [4] — aucun travail n’aborde l’équité dans des structures hiérarchiques. Pourtant, de nombreux contextes réels s’y prêtent naturellement : par exemple, l’allocation équitable de ressources sur un territoire entre régions, départements et communes. D’autres cas sont moins explicites. Par exemple, dans un problème d’allocation où les individus sont caractérisés par plusieurs attributs (genre, âge, lieu de résidence), on peut souhaiter une notion d’équité hiérarchique : l’équité est d’abord requise entre les genres, puis entre les classes d’âge au sein de chaque genre, et enfin entre les lieux de résidence au sein de chaque combinaison de genre et d’âge.

2 Modèle

On considère un problème d’allocation équitable de ressources indivisibles. On dénote $\mathcal{G}$ un ensemble de m objets que l’on souhaite allouer.

Hiérarchie. On modélise une structure hiérarchique par une *arborescence* $\mathcal{T} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$. L’ensemble $\mathcal{N}$ est composé de n nœuds (représentant des agents ou des groupes) indexés selon un ordre topologique – le nœud 1 désigne ainsi la racine de $\mathcal{T}$. Chaque nœud $i \in \mathcal{N}$ a un poids $w_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. L’ensemble $\mathcal{E}$ capture les relations de filiations entre les nœuds – il existe un arc d’un nœud i vers un nœud j si j est un subordonné du nœud i . Étant donné un nœud i , on dénote $\mathcal{C}(i)$ l’ensemble de ses enfants, $\mathcal{L}(i)$ l’ensemble des feuilles du sous-arbre enraciné en i et $\mathcal{P}(i)$ le parent (unique) de i . On dénote également $\text{Anc}(i)$ l’ensemble d’ancêtres de i , c’est-à-dire l’ensemble de nœuds sur le chemin entre i et la racine (en incluant i lui-même).

Allocation. Dans notre contexte, une allocation $\pi : \mathcal{N} \rightarrow 2^{\mathcal{G}}$ est dite multi-niveaux si (1) $\pi(1) = \mathcal{G}$, (2) $\pi(i) \supseteq \cup_{j \in \mathcal{C}(i)} \pi(j)$ pour tout nœud i qui n’est pas une feuille et (3) $\pi(i) \cap \pi(j) = \emptyset$ pour tous nœuds i, j avec le même parent. Autrement dit, une allocation multi-niveaux est une allocation de $\mathcal{G}$ aux nœuds dans $\mathcal{N}$ telle que chaque nœud recevant un item décide de l’allouer à au plus un de ses enfants. Une allocation multi-niveaux est dite complète si la condition (2) est une égalité pour tous les nœuds internes.

Utilités. La structure hiérarchique induit une différence de nature entre les nœuds internes de $\mathcal{T}$ qui peuvent allouer des items à leurs enfants, et les feuilles qui ne possèdent pas de descendants. Dans ces travaux, on suppose que les nœuds internes ont des utilités additives sur leurs enfants. Formellement, un nœud interne i a la fonction d’utilité $v_i(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{C}(i)} v_j(\pi)$ – autrement dit, i dérive son utilité de celle de ses enfants. Les feuilles de $\mathcal{T}$, quant à elles, ont des utilités additives classiques, sur les objets. Formellement, une feuille x a comme fonction d’utilité $u_x(\pi(x)) = \sum_{g \in \pi(x)} u_x(g)$, où $u_x(g)$ dénote l’utilité de la feuille x pour le singleton g .

Équité. L’objectif est de calculer une allocation multi-niveaux complète satisfaisant de bonnes garanties d’équité. Nous considérons la notion classique d’absence d’envie pondérée à un bien près (WEF1) [3], que nous adaptons au cadre multi-niveaux. Un défi majeur vient du fait qu’un nœud interne n’évalue pas directement des ensembles d’objets : son utilité, additive sur ses enfants, porte sur une allocation multi-niveaux. Suivant [4], nous faisons l’hypothèse que les agents sont agnostiques sur la manière dont les biens vont être alloués par leurs descendants, et nous définissons donc pour chaque nœud interne i la valeur d’un ensemble $S \subseteq \mathcal{G}$ comme la moyenne pondérée des utilités de ses feuilles $\bar{v}_i(S) = \sum_{x \in \mathcal{L}(i)} \sum_{g \in S} u_x(g) \cdot W(x, i)$ où $W(x, i) = \prod_{j \in \text{Anc}(x) \setminus \text{Anc}(i)} w_j / \sum_{j' \in \mathcal{C}(\mathcal{P}(j))} w_{j'}$. Une allocation multi-niveaux π est alors WEF1 multi-niveaux si, pour tout nœud interne i , il n’existe aucune paire $j, k \in \mathcal{C}(i)$ et aucun item $g \in \pi(k)$ tels que $\frac{v_j(\pi)}{w_j} < \frac{\bar{v}_j(\pi(k) \setminus \{g\})}{w_k}$. Nous considérons également une variante plus exigeante, WEFX, où l’item retiré est celui d’utilité minimale pour le nœud qui évalue l’ensemble.

3 Résultats théoriques

Nous établissons plusieurs résultats positifs dans des contextes où les préférences sont structurées, en étendant notamment certains algorithmes de [3, 4].

- Lorsque toutes les feuilles ont les mêmes utilités, nous généralisons deux algorithmes polynomiaux : le premier produit une allocation complète et WEFX multi-niveaux ; le second, qui comprend notamment une sous-routine correspondant à une extension multi-niveaux du round-robin pondéré, calcule une allocation complète, WEF1 multi-niveaux et EFX entre toutes les feuilles lorsque chaque nœud interne i a un poids $w_i = |\mathcal{L}(i)|$.
- Lorsque les feuilles appartenant à un même enfant de la racine ont les mêmes utilités, nous montrons que la version multi-niveaux du round-robin pondéré calcule en temps polynomial une allocation complète et WEF1 multi-niveaux. De plus, si les poids internes satisfont $w_i = |\mathcal{L}(i)|$, cet algorithme est également EF1 entre toutes les feuilles.

Dans le cas général, nous présentons une instance où aucune allocation complète et WEF1 multi-niveaux n’existe, établissant ainsi un résultat d’impossibilité.

4 Expériences

Nous analysons expérimentalement l’existence de différentes notions d’équité en construisant trois PLNE : (1) un modèle garantissant une allocation complète et WEF multi-niveaux, (2) un modèle assurant une allocation complète et WEF1 multi-niveaux, et (3) un modèle produisant une allocation complète, WEF1 multi-niveaux et EF1 au niveau des feuilles. Cette approche permet de dépasser l’analyse en pire cas et d’évaluer empiriquement la fréquence réelle des instances satisfaisant ces propriétés sur des données synthétiques.

Pour la génération des données synthétiques, nous utilisons deux méthodes de génération adaptées au cadre hiérarchique : une extension multi-niveaux du modèle de Mallows et une version multi-niveaux de la méthode de *resampling*. Cette dernière, introduite dans [2], permet de générer une grande diversité de profils de préférences. Bien que le cadre général présente un résultat d’impossibilité, nos expériences montrent que les cas où aucune allocation complète et WEF1 multi-niveaux n’existe sont extrêmement rares, nuancant ainsi ce résultat théorique.

References

- [1] Nawal Benabbou, Mithun Chakraborty, Edith Elkind, and Yair Zick. Fairness towards groups of agents in the allocation of indivisible items. In *Proc. of IJCAI’2019*.
- [2] Paula Böhm, Robert Bredereck, Paul Gözl, Andrzej Kaczmarczyk, and Stanisław Szufa. Putting fair division on the map. In *Proc. of AAAI’2026, to appear*.
- [3] Mithun Chakraborty, Ayumi Igarashi, Warut Suksompong, and Yair Zick. Weighted envy-freeness in indivisible item allocation. *ACM Trans. Econ. Comput.*, 9(3), August 2021.
- [4] Jonathan Scarlett, Nicholas Teh, and Yair Zick. For one and all: Individual and group fairness in the allocation of indivisible goods. In *Proc. of AAMAS’2023*.